

平成30年度 長崎大学大学院工学研究科 総合工学専攻  
機械工学コース 一般入試(夏期募集) 入学試験問題

数学

1  $n$  を 0 以上の整数とする。  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$  の値を次の手順で求めるとき、以下の間に答えなさい。

(1)  $I_0$  および  $I_1$  の値を求めなさい。

(2)  $n \geq 2$  のとき

$$I_n = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \quad (A)$$

と表すことができることを示しなさい。

(3) 式 (A) の右辺第 2 項の定積分に対して部分積分を適用して計算すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx = \frac{1}{n-1} I_n$$

となることを示しなさい。

(4) (3) の結果と式 (A) から

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n$$

が得られる。これを用いて、 $I_8$  および  $I_9$  の値を求めなさい。

2  $n$  を 0 以上の整数とする。また 2 行 2 列の行列  $A$  を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & -1/6 \end{bmatrix}$$

とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 与えられた行列  $A$  の固有値を絶対値の小さい順に  $\lambda_1, \lambda_2$  とする。また、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを  $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$  とする ( $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$  は実数)。  $\lambda_1, \lambda_2$  および  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$  である  $v_1, v_2$  を求めなさい。

(2) (1) で求めた  $v_1, v_2$  を順番に並べた 2 行 2 列の行列を  $T$  とし、  $T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$  を用いて  $L = T^{-1}AT$  と定義する。このとき、 $L^2, L^3$  および任意の  $n$  に対して  $L^n$  を求めなさい。

(3) (2) の  $L$  の定義より  $A = TLT^{-1}$  である。任意の  $n$  に対して  $A^n$  を (1) の  $\lambda_1, \lambda_2$  と定数  $a_i, b_i (i = 1, 2, 3, 4)$  を用いて次式の形に表す。

$$A^n = \begin{bmatrix} a_1 (\lambda_1)^n + b_1 (\lambda_2)^n & a_2 (\lambda_1)^n + b_2 (\lambda_2)^n \\ a_3 (\lambda_1)^n + b_3 (\lambda_2)^n & a_4 (\lambda_1)^n + b_4 (\lambda_2)^n \end{bmatrix}$$

$a_i, b_i (i = 1, 2, 3, 4)$  を求めなさい。

平成30年度 長崎大学大学院工学研究科 総合工学専攻  
機械工学コース 一般入試(夏期募集) 入学試験問題

数学

3  $x, a$  を実数とし、 $g(x)$  をすべての  $x$  について連続な関数とする。以下の微分方程式に関する問に答えなさい。

$$(a+1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - ay(x) = g(x)$$

(1) すべての  $x$  について  $g(x) = 0$  かつ  $a = -4/3$  とする。このとき、与えられた微分方程式の解  $y(x)$  のうち  $y(1) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$  を満足するものを求めなさい。

(2)  $g(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$  かつ  $a = -1/2$  とする。このとき、与えられた微分方程式の解  $y(x)$  のうち  $y(0) = 2/3, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1$  を満足するものを求めなさい。