

数 学

1 未知数 $y = y(x)$, $z = z(x)$ に関する次の連立方程式を解きなさい。ただし、

$$D = \frac{d}{dx} \text{である.}$$
$$\begin{cases} y/z = (D^2 - 1) \\ (D^2 + 2)y = \sin x \end{cases}$$

2 2次曲線

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 2y + 11 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

について、次の問に答えなさい。

(1) 式①の $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 2y$ を $\vec{x}A\vec{x} + 2\vec{b} \cdot \vec{x}$ とあらわすとき、

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, および $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を求めなさい。ただし、 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, A は実対称行列である。

(2) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) と、それぞれの固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトル \vec{p}_1, \vec{p}_2 を求めなさい。

(3) 実対称行列 A に対する直交行列を $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ とし、 $\vec{x} = P\vec{y}$ により式①を変換しなさい。ただし、 $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とする。

3 以下の問いに答えなさい。

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ を求めなさい。ただし、 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ である。

(2) $\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + 1}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$ をオイラーの公式と留数定理を用いて求めなさい。ただし、 $0 < a < 1$ である。