平成３１年度　長崎大学大学院工学研究科　総合工学専攻
機械工学コース　一般入試（夏期募集）　入学試験問題

数　学

$\boxed{1}$ ①式の微分方程式を，以下の手順に従って解きなさい．ただしeは自然対数とする．

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+3y=2\ln x \qquad \cdots①$$

(1)　$x=e^t$とおいたとき，以下の式のA，B，Cをxを用いて表しなさい．

$$\frac{dy}{dx}=A\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=B\frac{dy}{dt}+C\frac{d^2y}{dt^2}$$

(2)　式①を，yとtを用いた定数係数の微分方程式に変換しなさい．

(3)　(2)で求めた方程式に対して，その同次方程式の一般解y_{fd}を求めなさい．

(4)　(2)で求めた方程式を満足する特解y_{pt}を１つ求めなさい．

(5)　①の一般解を求めなさい．

$\boxed{2}$ 2×2 行列 $A=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値 λ_1,λ_2 $(\lambda_1>\lambda_2)$ と，各固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有ベクトルを用いて 2×2 行列 $V=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$ に対して，$\Delta=V^{-1}AV$ と定義する．このとき，Δ^n（nは 0 以上の整数）を求めなさい．

(3) 行列 A と二次単位行列 I を用いて，行列 A に対して 2×2 行列 $\exp A$ を次のように定義する．

$$\exp A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots$$

このとき，(2)で求めた Δ^n と $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$ を用いて，$\exp A$ を求めなさい．

$\boxed{3}$ 球面$x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$とxy平面で囲まれた立体から，円柱$x^2+y^2=a^2, |a|<1, z\geq 0$と重なる部分を取り除いた立体Ｓの表面積を求めなさい．