

1. 2重積分

$$I = \iint_D xy^2 dx dy \quad (D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\})$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $I = \int_a^b \left(\int_c^d xy^2 dy \right) dx = \int_e^f \left(\int_g^h xy^2 dx \right) dy$ を満たす a, b, c, d, e, f, g, h をそれぞれ求めよ
(必要であれば x, y を用いてもよい).

(2) I を求めよ。

解答欄 (解答欄が不足した場合は、その旨明記した上で裏面を利用すること.)

2. 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ を満たすとき, $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$ を求めよ.

解答欄 (解答欄が不足した場合は, その旨明記した上で裏面を利用すること.)

3. 以下の問いに答えよ.

(1) $\varphi(75)$ を求めよ. ただし, φ はオイラー関数である.

(2) 13^{2021} を 75 で割った余りを求めよ.

解答欄 (解答欄が不足した場合は, その旨明記した上で裏面を利用すること.)

4. 「表 (オモテ)」が出る確率が $\frac{4}{5}$, 「裏 (ウラ)」が出る確率が $\frac{1}{5}$ であるコインが 1 枚ある. また, このコインの面をみて, 「表」か「裏」かを判定する機械が 2 台ある. ただし, どちらの機械も, 「表」が出た時に, 正しく「表」と判定する確率は $\frac{9}{10}$, 誤って「裏」と判定する確率は $\frac{1}{10}$ であり, 「裏」が出た時に, 正しく「裏」と判定する確率は $\frac{9}{10}$, 誤って「表」と判定する確率は $\frac{1}{10}$ である. そして, これら 2 台の機械は, 互いに影響されることなく判定するものとする. コインを 1 回投げたとき, 正しく判定できた機械の台数を X とし ($X \in \{0, 1, 2\}$), $X = t$ となる確率を $P(t)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ をそれぞれ求めよ.
- (2) X の平均 $E(X)$, および分散 $V(X)$ をそれぞれ求めよ.
- (3) 2 台の機械が同じ判定結果を出力したとき, 実際にその結果が正しく判定されている確率を求めよ.
- (4) 2 台の機械が, 共に「表」の判定結果を出力したとき, 実際にコインの面が「表」である確率を求めよ.

解答欄 (解答欄が不足した場合は, その旨明記した上で裏面を利用すること.)