

令和5年度 長崎大学大学院工学研究科 総合工学専攻  
機械工学コース 一般入試（夏期募集） 入学試験問題

数学

1  $xy$  平面上の楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b$  は正の実数) の接線と  $x$  軸との交点を  $A$ 、 $y$  軸との交点を  $B$  とする。線分  $AB$  の長さの最小値を求めなさい。ただし、接点は第1象限内の点とする。

2  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) を実数とし、 $2 \times 2$  行列  $A$  を  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  とする。この  $A$  に対して、 $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$  と定義し、 $\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$  とする。このとき、以下の間に答えなさい。ただし、 $I$  は  $2 \times 2$  の単位行列を表し、 $|\cdot|$  は行列式を表す。

- (1)  $\phi(\lambda)$  は  $\lambda$  の2次式  $\phi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$  ( $p, q$  は実数) で表される。 $p, q$  を  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) のうち必要なものを用いて表しなさい。
- (2) 方程式  $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$  の解 (行列  $A$  の固有値) を  $\lambda_1, \lambda_2$  とする。 $\text{Tr}(A)$  と  $|A|$  をそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  で表しなさい。
- (3) 与えられた行列  $A$  に逆行列が存在するとき、(2) の  $\lambda_1, \lambda_2$  はともに0でないことを示しなさい。
- (4)  $\phi(\lambda)$  の  $\lambda$  に与えられた行列  $A$  を代入して得られる  $2 \times 2$  行列  $\phi(A)$  を  $\phi(A) = A^2 + pA + qI$  と定義する。 $\phi(A)$  を求めなさい。
- (5)  $t$  を実数とし、 $a_{11} = -\sin t, a_{12} = \cos t + 1, a_{21} = \cos t - 1, a_{22} = \sin t$  とする。このとき、 $\sum_{k=1}^n A^k$  ( $n$  は1以上の整数) を求めなさい。

3 定積分  $I$  を  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$  とする。以下の間に答えなさい。

- (1) 与えられた  $I$  を変数変換  $z = e^{ix}$  を用いて複素数平面上のある閉曲線  $C$  を経路とする積分に変換しなさい。ただし、 $i$  は虚数単位 ( $i^2 = -1$  を満足する) とする。
- (2) 留数定理を用いて  $I$  の値を求めなさい。