令和３年度　長崎大学大学院工学研究科　総合工学専攻
機械工学コース　一般入試（夏季募集）　入学試験問題

数学

$\boxed{1}$ $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} - \sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ について以下の設問に答えなさい．

(1) $f'(x)$ を求めなさい．

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ の値を求めなさい．

$\boxed{2}$ a を $a > 0$ の実数とし，2×2 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ とする．また，$y = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ とする（$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ を転置したベクトルである）．以下の設問に答えなさい．

(1) 行列 A の固有値を λ_1，λ_2 とする $(\lambda_1 \geqq \lambda_2)$．$\lambda_1$，$\lambda_2$ を求めなさい．また，λ_i $(i=1,2)$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$ $(i=1,2)$ （α_i, β_i $(i=1,2)$ は実数）とするとき，$\boldsymbol{v}_i (i=1,2)$ のうちで，$||\boldsymbol{v}_i|| = 1$ $(||\boldsymbol{v}_i||^2 = 1)$，$\alpha_i > 0 (i=1,2)$ を満足するものを求めなさい．

(2) (1) の $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は互いに直交することを示しなさい．また，2×2 行列 P を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ と定義するとき，$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ を満足することを示しなさい．ただし，P^{T} は行列 P の転置行列である．さらに，3 つの行列の積 $P^{\mathrm{T}}AP$ を求めなさい．

(3) $\mathbf{R}^2$ に属する 2 個のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ とする．ただし $||\boldsymbol{x}|| = 1$ $(||\boldsymbol{x}||^2 = 1)$ を満たすとする．このとき，(2) で求めた行列 P に対して $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z}$ とすると，$||\boldsymbol{z}|| = 1$ $(||\boldsymbol{z}||^2 = 1)$ であることを示しなさい．さらに，z_1 の取り得る値の範囲を求めなさい．

(4) $||\boldsymbol{x}|| = 1$ $(||\boldsymbol{x}||^2 = 1)$ を満たすとき，$y = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$ を z_1 の式で表し，y の最大値とそのときのベクトル $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{x}$ および y の最小値とそのときのベクトル $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

$\boxed{3}$ a と x を正の実数，m を整数とする広義積分 $I_m = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} dx$ は，コーシーの積分定理（あるいは留数定理）を用いて計算することができる．以下の設問に答えなさい．

(1) I_m を計算しなさい．

(2) 無限級数 $I_0 + I_1 + I_2 + \cdots$ の値を求めなさい．